928. 可換ナ Radikal ヲ持ツ Lie 環（II）

安倍　亮（東大）

4. 表現ト自己同型トノ関係

$\mathfrak{g}$ ヲ P ノ上ノ Lie-algebra（又ハ群，P ノ上ノ通常ノ algebra 等），$\mathfrak{d}: S \longrightarrow \mathfrak{d}(S)$ ヲソノ表現，$A: S \longrightarrow A_S$ ヲソノ autom. トスル。表現 $S \longrightarrow \mathfrak{d}(A_S)$ ヲ $\mathfrak{d}^A$ ト書クトキ，$\mathfrak{d}$ ト $\mathfrak{d}^A$ トノ関係ニ就テ次ノ二ツノ問題ガ，夫々前談話第1節及第二節デ起ッタ。

i)　何等カノ A ニ依ッテ $\mathfrak{d}_1 \sim \mathfrak{d}^A$ トナルトキ，$\mathfrak{d}_1 \underset{(A)}{\sim} \mathfrak{d}$（(A)-äquivalent）ト書ク事ニスル。$\mathfrak{g}$ ノ総テノ表現類ヲ (A)-äquivalenz ニ依ッテ類別スル事。（之ヲ (A)-類ト云ハウ）

ii)　一ツノ表現 $\mathfrak{d}$ ガ與ヘラレタトキ，$\mathfrak{d}^A \sim \mathfrak{d}$ ナル autom. A ノ範囲ヲ決メルコト。此様ナ A ノ全体ハ (A) ノ部分群 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{d}}$ ヲ作ル。

何レニシテモ $\mathfrak{d}$ ト A カラ $\mathfrak{d}^A$ ヲ求メル方法ニ就テ見通シガ附ケバヨイ。先ヅ明カニ

〔4.1〕『$\mathfrak{D}$ガ完全可約ナラ，$\mathfrak{D}$ヲ既約成分ニ分ケテ，
$\mathfrak{D}\sim\mathfrak{D}_1+\mathfrak{D}_2+\cdots\cdots+\mathfrak{D}_d$ トセバ，

$$\mathfrak{D}^A\sim\mathfrak{D}_1^A+\mathfrak{D}_2^A+\cdots\cdots+\mathfrak{D}_d^A$$

従ッテ総テノ表現ガ完全可約ナ場合ニハ，既約表現$\mathfrak{D}$ニ対シテ$\mathfrak{D}^A$ガ分レバヨイ』

[注意] i) ニ就テ。$\mathfrak{D}\sim\mathfrak{D}_1+\cdots\cdots+\mathfrak{D}_d$, $\mathfrak{D}'\sim\mathfrak{D}_1'+\cdots\cdots+\mathfrak{D}_d'$, $\mathfrak{D}_i\underset{(A)}{\sim}\mathfrak{D}_i'$, $i=1,\cdots\cdots,d$ デアッテモ必ズシモ $\mathfrak{D}\underset{(A)}{\sim}\mathfrak{D}'$ トハ云ヘナイ。$\mathfrak{D}\underset{(A)}{\sim}\mathfrak{D}'$ ナルタメニハ或ル一ツノ A ニ対シテ $\mathfrak{D}_1'\sim\mathfrak{D}_1^A,\cdots\cdots,\mathfrak{D}_d'\sim\mathfrak{D}_d^A$ ガ同時ニ成立タナケレバナラナイ。

ii) ニ就テ。$\mathfrak{D}$ガ既約成分 $\mathfrak{D}_1$ ヲ f－重ニ含ミ，且ツ $\mathfrak{D}^A\sim\mathfrak{D}$ デアルナラバ，$\mathfrak{D}$ ハ既約成分 $\mathfrak{D}_1^A$, $\mathfrak{D}_1^{A^2}$, $\cdots\cdots$ ヲモ皆 f－重ニ含マナケレバナラナイ。其レハ無限ニハ有リ得ナイカラ，始メテ $\mathfrak{D}_1^{A^\nu}\sim\mathfrak{D}_1$ トナル $\nu\geqq 1$ ガアル。$\mathfrak{D}$ハ従ッテ $f\mathfrak{D}_1+f\mathfrak{D}_1^A+\cdots\cdots+f\mathfrak{D}_1^{A^{\nu-1}}$ ノ様ナ塊ガ幾ツカ集マッテ出来テ居ル。

[A] ヲ A ノ erzeugen スル (A) ノ部分群トスル。$\mathfrak{D}^A\sim\mathfrak{D}$ ナルタメニハ，上ニ述ベタヤウニ，$\mathfrak{D}$ ノ既約成分 $\mathfrak{D}_1$ ノ [A]－Äquivalenzklasse ハ有限個ノ表現類 $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_1^A$, $\cdots\cdots$, $\mathfrak{D}_1^{A^{\nu-1}}$ カラ成ルコトガ少クトモ必要デアル。所ガ實際ニハ既約表現ノ [A]－類ヨリハ一般ニハ大キイ (A)－類（(A) ハ Autom 全体ノ群）ガ既ニ有限個ノ表現類カラ出来テ居ル場合ガ多イ。例ヘバ $\mathfrak{G}$ ガ有限群ヤ通常ノ準単純ナ algebra ノ場合ノヤウニ，元々既約表現類ガ

有限個シカナイ時ハ問題ハナイ。$\mathfrak{G}$ ガ準単純ナ Lie 群ヤ（少クトモ複素数体ノ上ノ[1]）準単純ナ Lie 環ノトキハ既約表現ハ無限ニ澤山アルガ，此ノ場合デモ (A)－類ハ有限個ノ表現類カラ出来テ居ル。モット精シク云ヘバ，(A) ノ中デドノ表現ヲモ変ヘナイ autom. ノ作ル部分群ヲ $\mathfrak{A}_0$ トスルト，$\mathfrak{A}_0$ ノ (A) ニ於ケル Index (A): $\mathfrak{A}_0$ ハ有限デアル。（後述参照）

定理[4.2]『$\mathfrak{G}$ ノ P ニ於ケル表現 $\mathfrak{D}$ ハ完全可約ダトスル。$\mathfrak{D}^A \sim \mathfrak{D}$ ナル A ノ全体 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$ ヲ求メルニハ次ノ様ニスレバヨイ：

先ヅ $\mathfrak{D}$ ヲ既約成分ニ分ケ，其ノ中丁度 f－重ニハイッテ居ル成分ヲ一ツ宛取ッテ其ノ和表現ヲ $\overset{f}{\mathfrak{D}}$ トスルト

$$\mathfrak{D} \sim \overset{1}{\mathfrak{D}} + 2\overset{2}{\mathfrak{D}} + \cdots\cdots + g\overset{g}{\mathfrak{D}}$$

$\overset{f}{\mathfrak{D}}$ ヲ (A)－類ニ分ケル。

$$\overset{f}{\mathfrak{D}} \sim \overset{f}{\mathfrak{D}}_1 + \cdots\cdots + \overset{f}{\mathfrak{D}}_{m_f}$$

$\overset{f}{\mathfrak{D}}_i$ ハ同ジ (A)－類ニ属スル幾ツカノ表現ノ和デ，且ツ各成分ハ一重ニハイッテ居ル。$\mathfrak{D}^A \sim \mathfrak{D}$ ナルタメニハ，総テ $\overset{f}{\mathfrak{D}}_i$ ニ對シ

$$\overset{f}{\mathfrak{D}}{}_i^A \sim \overset{f}{\mathfrak{D}}_i$$

ナルコトガ必要十分デアル。従ッテ

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}} = \bigcap_{f,i} \mathfrak{A}_{\overset{f}{\mathfrak{D}}_i}$$』

---

1) 基礎体ノ制限ハ恐ラク不要デアラウ。本談話最後ノ［注意3］参照.

〔証明〕 $\overset{f}{\mathfrak{a}}{}_i^A \sim \overset{f}{\mathfrak{a}}_i$ ナラ十分デアルコトハ明カデアル。逆ニ $\mathfrak{a}^A \sim \mathfrak{a}$ ダトスル。既約成分 $\vartheta \subset \overset{f}{\mathfrak{a}}$ 即チ ϑ ガ f-重ナラ ϑ^A モ f-重ダカラ（$\vartheta' \neq \vartheta$ ニ對シテモ $\vartheta'^A \sim \vartheta^A$ ニナルト云フ心配ハナイ；A ハ逆ガアルカラ）$\vartheta^A \subset \overset{f}{\mathfrak{a}}$，從ッテ

$$\overset{f}{\mathfrak{a}}{}^A \sim \overset{f}{\mathfrak{a}}$$

ナルコトガ分ル。勿論任意ノ既約成分ハ，ソレト (A)-äquivalent ナモノニシカ行カナイカラ，之レカラ更ニ

$$\overset{f}{\mathfrak{a}}{}_i^A \sim \overset{f}{\mathfrak{a}}_i. \qquad q.e.d.$$

此様ニシテ問題(1)ハ $\overset{f}{\mathfrak{a}}_i$ ノ様ナ表現ノ問題ニ帰着サレル。扨テ一ツ一ツノ $\overset{f}{\mathfrak{a}}_i$ ハ

$$\overset{f}{\mathfrak{a}}_i \sim \vartheta^{A_1} + \vartheta^{A_2} + \cdots + \vartheta^{A_l}, \quad \vartheta\text{ハ既約}, \ A_k \in (A)$$

ノ形ニ書ケル。茲ニ $(A)/\mathfrak{A}_\vartheta$ ノ Nebenklassen ノ集合

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{A}_\vartheta A_1 + \cdots + \mathfrak{A}_\vartheta A_l$$

ノ各項ハ重複ガナイ。$\mathfrak{A}_{\overset{f}{\mathfrak{a}}_i}$ ハ $A\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$ ナル A ノ集合デアル（今マデノ節ト一致サセルタメニ，autom. ノ積 AB ハ erst B, dann A ヲ意味スル。從ッテ少シ不自然デアルガ $(\mathfrak{a}^A)^B = \mathfrak{a}^{BA}$）。ソレハ明カニ $\mathfrak{A}_\vartheta$ ヲ含ム部分群 $\mathfrak{G}$ デアッテ

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{G} A_1 + \cdots + \mathfrak{G} A_m$$

ノ形ニ書ケル最大ノ $\mathfrak{G}$ デアル。実際上ニハ餘リ役ニ立タナイガ，定理トシテ書ケバ

定理〔4.3〕『$\mathfrak{a} \sim \vartheta^{A_1} + \cdots + \vartheta^{A_l}$, $\vartheta^{A_i} \neq \vartheta^{A_j}$ $(i \neq j)$

ノ形ノ表現 ϑ ニ對シテ $\mathfrak{a}_\vartheta$ ハ、$(A)/\mathfrak{a}_\vartheta$ ノ副群ノ集合

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{a}_\vartheta A_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{a}_\vartheta A_l$$

ガ $(A)/\mathfrak{b}$ ノ副群ノ集合

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{b} A_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{b} A_m$$

トシテ書ケル様ナ最大ノ $\mathfrak{b}$ デアル。』

$\mathfrak{g}$ ハ元通リ準單純 Lie 環トシ

$$(4.1)\qquad \mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{g}_1^{(1)} + \cdots\cdots + \mathfrak{g}_1^{(m_1)}} + \cdots\cdots + \underbrace{\mathfrak{g}_s^{(1)} + \cdots\cdots + \mathfrak{g}_s^{(m_s)}}$$

ヲ單純 Ideal ヘノ分解トスル。m_i 個ノ成分 $\mathfrak{g}_i^{(1)}, \cdots\cdots, \mathfrak{g}_i^{(m_i)}$ ハ皆單純環 $\mathfrak{g}_i$ ニ同型デ、且ツ番号ガ違ヘバ $\mathfrak{g}_i$ ト $\mathfrak{g}_j$ ハ同型デナイトスル。$S_i^{(j)} \in \mathfrak{g}_i^{(j)}$ ハ或ル豫メ決ッタ同型ナ對應デ $S_i \in \mathfrak{g}_i$ ニ對應スル元トスル。此ノ對應ヲ決メテ置ケバ、$\mathfrak{g}_i$ ノ autom. A_i ヲ直チニ $\mathfrak{g}_i^{(1)}, \cdots\cdots, \mathfrak{g}_i^{(m_i)}$ ノ autom. トモ考ヘルコトガ出来ル。扨テ A ヲ $\mathfrak{g}$ ノ autom. トスレバ、(4.1) ノ分解ハ一意的ダカラ A ハ $(\mathfrak{g}_1^{(1)}, \cdots\cdots, \mathfrak{g}_1^{(m_1)})$, $\cdots\cdots$, $(\mathfrak{g}_s^{(1)}, \cdots\cdots, \mathfrak{g}_s^{(m_s)})$ ヲ夫々其ノ中デ permutate スル。從ッテ：

〔4.4〕『(4.1) デ與ヘラレル $\mathfrak{g}$ ノ autom. A ハ次ノ形ニナル：

$$(4.2)\begin{cases} A\mathfrak{g}_i^{(j)} = \mathfrak{g}_i^{(j')}, \quad j' = \pi_i(j) \\ \qquad \pi_i \text{ ハ } (1, \cdots\cdots, m_i) \text{ ノ Permutation} \\ A S_i^{(j)} = A_i^{(j')} S_i^{(j')}, \quad S_i^{(j)} \in \mathfrak{g}_i^{(j)}, \ A_i^{(j)} \text{ ハ } \mathfrak{g}_i \text{ ノ autom.』} \end{cases}$$

次ニ準単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ ノ基礎体 P ガ代数的閉体デアルトスル。$\mathfrak{g}$ ハ（4.1）ノ様ニ分解サレテ居ルトスル。$\mathfrak{g}_i$ ノ既約表現ヲ $\mathfrak{d}_i^{(j)}$ 等トスルト，（之等ヲ $\mathfrak{g}_i^{(j)}$ ノ表現ト考ヘテ）$\mathfrak{g}$ ノ既約表現 $\mathfrak{d}$ ハ前談話第一節ニ引用シタ定理ニ依ッテ

$$(4.3)\qquad \mathfrak{d}=\mathfrak{d}_1^{(1)}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{d}_1^{(m_1)}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{d}_s^{(1)}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{d}_s^{(m_s)}$$

ノ形ニナル。明カニ

［4.5］『（4.3）デ與ヘラレル既約表現 $\mathfrak{d}$ ＝（4.2）デ與ヘラレル autom. A ヲ作用サセルト

$$(4.4)\qquad \mathfrak{d}^A=\mathfrak{d}_1^{(1')A_1^{(1)}}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{d}_1^{(m_1')A_1^{(m_1)}}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{d}_s^{(1')A_s^{(1)}}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{d}_s^{(m_s')A_s^{(m_s)}}$$

従ッテ基礎体ガ代数的閉体ノ場合ニハ，問題 i) ii) ノ解決ニハ単純 Lie 環ノ既約表現ガ其ノ autom. ニ依ッテドウ変ルカ分レバヨイ。』

少シ精シク考ヘテ見ヨウ：

問題 i) ニ就テ。$\mathfrak{g}$ ノ一般ノ表現ハ（4.3）ノ形ノ表現ノ和ダカラ

$$(4.5)\qquad \left|\begin{array}{ccc|c|ccc} {}^1\mathfrak{d}_1^{(1)} & \cdots\cdots & {}^1\mathfrak{d}_1^{(m_1)} & \cdots\cdots & {}^1\mathfrak{d}_s^{(1)} & \cdots\cdots & {}^1\mathfrak{d}_s^{(m_s)} \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ {}^d\mathfrak{d}_1^{(1)} & \cdots\cdots & {}^d\mathfrak{d}_1^{(m_1)} & \cdots\cdots & {}^d\mathfrak{d}_s^{(1)} & \cdots\cdots & {}^d\mathfrak{d}_s^{(m_s)} \end{array}\right|$$

ノ形ノ表デアラハセル。コノ表現ニ（4.2）ノ autom. ヲ施シタ結果ハ

a) 縦線デ區切ラレタ一ツノ矩形内ノ列ヲ相互ニ permutate スル事

b) 一ツノ列ノスベテノ表現ニ(ソノ表現ノ屬スル單純環ノ)一ツノ Autom. ヲ同時ニ施ス事

a) ヲ各矩形デ, b) ヲ各列デ行フコトニヨリ得ラレル。猶

c) 行ノ Permutation

ハ表現ヲ変ヘナイ。

[4.5′] 『表現 ϑ が(4.5)ノ表デ與ヘラレルナラ, ϑ ノ(A)－類ノ表現ヲ得ルニハ, ϑ ニ a), b) ノ process ヲ行ッテ得ラレルモノヲ全部取リ, 其ノ中デ c) ノ process デ移レルモノハ區別シナイ事ニスレバヨイ。』

特ニ既約表現ニツイテハ:

[4.5″] 『表現 ϑ が既約デ(4.3)デ表ハサレル場合ニ, ϑ ノ(A)－類ハ

$$\vartheta_i^{(1)}, \cdots\cdots, \vartheta_i^{(m_i)}$$

ヲ $\mathfrak{S}_i$ ノ既約表現トシテ(A)－類ニ分ケタトキノ各(A)－類ノ個数ヲ $i=1, \cdots\cdots, s$ ニ就テ與ヘレバ決ル。従ッテ既約ナ(A)類ノ代表トシテハ:

單純環 $\mathfrak{S}_i$ ノ既約表現ノ各(A)－類カラ一ツヅツ代表ヲ取ッテ, 且順序ヲツケテ

$$\vartheta_{i1}, \vartheta_{i2}, \cdots\cdots$$

トシテオク。$\mathfrak{S}$ ノ(A)類ノ代表トシテハ

$$\vartheta = \cdots\cdots \times \vartheta_{i1}^{k_{i1}} \times \vartheta_{i2}^{k_{i2}} \times \cdots\cdots$$

$$l_{i1} + l_{i2} + \cdots = m_i, \quad l_{ij} \geqq 0$$

ナル表現ヲ全部作レバヨイ。」

（即チ基礎体ガ代数的閉体デ Radikal ガ minimal ナ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G};\mathfrak{D})$ ヲ全部求メルニハ，上ノ様ナ表現 $\mathfrak{D}$ ヲ全部持ッテ来レバ洩レナク而モ重複ナシニ得ラレルノデアル。）

問題 ii) ニ就テ。$\mathfrak{G}$ ノ直和分解（4.1）ニ於テ $\mathfrak{G}_i$ ニ isomorph ナ Ideal ノ和ヲ一纏メニシテ $\mathfrak{f}_i$ トシ

(4.6) $\quad \mathfrak{G} = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \cdots + \mathfrak{f}_s$

ソレニ對應シテ $\mathfrak{G}$ ノ既約表現ヲ

(4.7) $\quad {}^j\mathfrak{D} = {}^j\mathfrak{D}_1 \times {}^j\mathfrak{D}_2 \times \cdots \times {}^j\mathfrak{D}_s$

トスル。

(4.8) $\quad \mathfrak{D} = {}^1\mathfrak{D} + \cdots + {}^d\mathfrak{D}$

ナル表現ノ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{D}}$ ヲ考ヘルノニ [4.2] ニ依ッテ ${}^1\mathfrak{D}, \cdots, {}^d\mathfrak{D}$ ハ全部異ナリ而モ互ニ (A)-äquivalent ナ場合ニ限ッテヨイ。$\mathfrak{G}$ ノ Autom. A ハ [4.4] ニヨリ，$\mathfrak{f}_i$ ノ Autom. A_i カラ

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_s$$

ノ形ニ得ラレル。モシ $\mathfrak{D}^A \sim \mathfrak{D}$ ナラ ${}^1\mathfrak{D}^A, \cdots, {}^d\mathfrak{D}^A$ ハ ${}^1\mathfrak{D}, \cdots, {}^d\mathfrak{D}$ ノ Permutation デアル。即チ ${}^j\mathfrak{D}^A \sim {}^{j'}\mathfrak{D}$, $j' = \pi(j)$, π ハ $(1, \cdots, d)$ ノ Perm., $\pi \in \mathfrak{S}_d$. 従ッテ又 ${}^j\mathfrak{D}_i^{A_i} \sim {}^{j'}\mathfrak{D}_i$ デナケレバナラナイ。π ノ全体ハ $\mathfrak{S}_d$ ノ部分群 $\mathfrak{P}$ ヲ作リ，$\mathfrak{P}$ ハ transtiv ダカラ，再ビ [4.2] ニ依ッテ ${}^1\mathfrak{D}_i, \cdots, {}^d\mathfrak{D}_i$ ノ中ニ重複シタモノガアルニシテモ重複度ハ全部同一デアル。ソコデ次ノ定理ヲ得ル。

定理[4.6]『(4.6)デ與ヘラレル f ノ(4.8)デ與ヘラレル表現 $\mathfrak{d}$ ガ重複ノナイ互ニ(A)-äquivalent ナ既約成分カラ出来テ居ルトスル。先ヅ f_i ノ表現

$$\mathfrak{d}_i = \overset{1}{\mathfrak{d}}_i + \cdots\cdots + \overset{d}{\mathfrak{d}}_i$$

ヲ変ヘナイ A_i ノ全体 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{d}_i}$ ヲ求メル。($\mathfrak{d}_{i0}$ ヲ重複成分ノナイ表現トシテ $\mathfrak{d}_i \sim f_i \mathfrak{d}_{i0}$ ノ形ニカケル。$\mathfrak{a}_{\mathfrak{d}_i} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{d}_{i0}}$ ハ定理[4.3]ニ依ツテキマル。f_i ヲ直和成分ニ分ケテ精シク論ズルコトハ止メニスル)　$\mathfrak{a}_{\mathfrak{d}_i} \ni A_i$ ニ對シ, 夫レガ $\overset{1}{\mathfrak{d}}_i, \cdots\cdots, \overset{d}{\mathfrak{d}}_i$ ノ上ノ Index $1, \cdots\cdots, d$ ニ惹起ス Permutation π_i ガ對應スル。$A_i \longrightarrow \pi_i$　但シ $\overset{1}{\mathfrak{d}}_i, \cdots\cdots, \overset{d}{\mathfrak{d}}_i$ ニハ重複ガアリ得ルカラ π_i ハ A_i カラ一意的ニハ決ラナイガ, 其等ヲ全部 A_i ニ對應サセル。$\mathfrak{a}_{\mathfrak{d}_i}$ ニ對應スル π_i ノ全体ヲ $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \cap \cdots\cdots, \mathfrak{P}_s = \mathfrak{P}$ トスル。又 $A_i \longrightarrow \pi < \mathfrak{P}$ ナル A_i ノ全体ヲ $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{d}_i}$ トスル。$\mathfrak{a}_{\mathfrak{d}}$ ノ Autom. A ハ

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots\cdots \times A_s \in \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{a}_s$$

ノ中デ, アル $\pi \in \mathfrak{P}$ ニ對シ

$$A_1 \rightarrow \pi,\ A_2 \rightarrow \pi, \cdots\cdots, A_n \rightarrow \pi$$

ニナルヤウナモノノ全体デアル。』

群ヤ通常ノ環ニ於テハ $\mathfrak{d}$ ガドンナ表現デアッテモ, inner Autom. A ハ $\mathfrak{d}$ ヲ変ヘナイ。吾々ノ問題トスル Lie 環ノ場合ニハ, 一般ノ基礎体デ考ヘル場合ニハ一般ニハ Lie 群ニ相當スルモノガナイカラ, inner Autom. トハ何カ一

ヲ定義シニクイ。之カラハ基礎体Pガ複素数体ノ場合ニ限ッテ，今マデノ問題ヲ更ニ立入ッテ考ヘテ見ヨウ。

$\mathfrak{r}$ヲ複素数体Kノ上ノ任意ノLie環，$\mathfrak{r}$ヲ無限小変換群トシテ持ツ，単一連結ナLie群ヲ$\mathfrak{G}$トスル。（ソノ存在ハPontrjagin: Topological group, Th. 84）$\mathfrak{G}$ノ元aニヨル$\mathfrak{G}$ノ内部同型 $\mathfrak{G} \ni g \to a^{-1}ga = A_a g$ ハ$\mathfrak{r}$ノ autom. A_aヲ惹起ス。$\mathfrak{r}$ノ斯様ナ自己同型ヲ矢張リ「内部同型」ト名ヅケ，ソノ全体ヲ$\mathfrak{A}_0$トスル。扨テ$\mathfrak{r}$ノ表現$\vartheta: S \to \vartheta(S)$ハ$\mathfrak{G}$ノ単位元素ノ近傍ノ表現ニ「拡張」サレル，之レハ$\mathfrak{G}$ガ単一連結ナコトカラ，更ニ$\mathfrak{G}$全体ノ表現ニ一意的ニ拡張サレル。（Pontrjagin: ibid. Th. 63）コヽニ「拡張」ト云ッタ意味ハ，one-parameter subgroup $\{g_t\}$ノ無限小変換ガSナルトキ

$$\left(\frac{d\vartheta(g_t)}{dt}\right)_{g_t=e} = \vartheta(S)$$

トナッテ居ルコトデアル。$\vartheta(A_a g_t) = \vartheta(a)^{-1}\vartheta(g_t)\vartheta(a)$ヲ微分シテ

$$\vartheta(A_a S) = \vartheta(a)^{-1}\vartheta(S)\vartheta(a)$$

定理〔4.7〕 即複素係数ノLie環（又ハ任意ノ群，通常ノ環）$\mathfrak{r}$ノ内部同型ハ$\mathfrak{r}$ノ如何ナル表現ϑヲモ変ヘナイ。即チ$\mathfrak{r}$ノ自己同型群ヲ$\mathfrak{A}$[2)]，内部同型群ヲ$\mathfrak{A}_0$，ϑヲ変ヘナイ自己同型ノ群ヲ$\mathfrak{A}_\vartheta$トセバ

---

2) 自己同型全体ノ群ハ今マデ(A)ト書イタガ，今後ハ$\mathfrak{A}$ト書クコトニスル。

$\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_\vartheta \subset \mathfrak{a}$ 」

特ニ吾々ノ問題トスル準單純 Lie 環ノ場合ニハ無限小自己同型（derivation (jacobson)）ハ總テ inner ダカラ，$\mathfrak{a}_0$ ハ $\mathfrak{a}$ ノ單位元素ト結ベル元ノ全体デアル。

$\mathfrak{g}$ ノ一ツノ正則元ヲ含ム最大可換部分環ヲ $\mathfrak{f}$ トスル。A ヲ任意ノ autom. トセバ $A\mathfrak{f} = U\mathfrak{f}$ ナル如キ $U \in \mathfrak{a}_0$ ガアル。$U^{-1}A\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ 即チ mod. $\mathfrak{a}_0$ ノ代表ハ $\mathfrak{f}$ ヲ invariant ニスル様ニ選ブコトが出來ル。

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + A_1\mathfrak{a}_0 + \cdots + A_i\mathfrak{a}_0 + \cdots$$

$$A_i\mathfrak{f} = \mathfrak{f} \qquad i=1,2,\cdots$$

$\mathfrak{a}_\vartheta$ ハ定理〔4.7〕ニヨリ之レ等ノ Nebengruppen ノ幾ツカカラ出來テ居ル。

$A\mathfrak{f}=\mathfrak{f}$ ナル autom. A ハ $\mathfrak{f} = h_1K + \cdots + h_nK$ ノ元 $\sum h_i\lambda_i$ ノ一次変換 τ_A ヲ起ス。ソレハ Wurzelformen $\alpha = \sum \alpha_i\lambda_i, \cdots, \rho = \sum \rho_i\lambda_i$（即チ $\sum h_i\lambda_i$ ノ正規表現ノ固有値）ノ Perm. ヲ生ズル。Wurzel ヲ permutate スル λ-空間ノ一次変換（之レヲ "rotation" ト云フコトニスル）全体ノ群ヲ $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}$ ノ中デ, Wurzel ニ垂直ナ超平面ニ關スル Spiegelung ノ erzeugen スル Normalteiler ヲ $\mathfrak{r}$ トスル。$A\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ ナル autom. A ハ $A \in \mathfrak{a}_0$ ノトキソノ時ニ限リ $\mathfrak{r}$ ノ "rotation" ヲ惹起ス。之レカラ $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_0 \cong \mathfrak{T}/\mathfrak{r}$ ガ分ル。従ツテ特ニ $\mathfrak{a}_0$ ノ $\mathfrak{a}$ ニ於ケル Index ハ有限デアル。（コノ辺ノコトハ例ヘバ Gantmacher: Canonical representation of automorphismus of a complex semi-simple Lie group, Rec. Math. Moscou Tom 5 (1939) ニ精シイ)

扨テ $\mathfrak{g}$ ノ表現 ϑ ノ gewicht, 即チ $\vartheta(\sum h_i \lambda_i)$ ノ固有値ヲ $\Lambda^{(1)} = \sum \Lambda^{(1)}_i \lambda_i, \cdots\cdots, \Lambda^{(g)} = \sum \Lambda^{(g)}_i \lambda_i$ トスル。$A\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ ナラバ表現 ϑ^A ノ gewicht ハ $\tau_A(\Lambda^{(1)}), \cdots\cdots\cdots, \tau_A(\Lambda^{(g)})$ トナル。$\vartheta \sim \vartheta^A$ デアル必要十分條件ハ $\Lambda^{(1)}, \cdots\cdots, \Lambda^{(g)}$ ト $\tau_A(\Lambda^{(1)}), \cdots\cdots, \tau_A(\Lambda^{g})$ ガ全体トシテ一致スルコトデアル。特ニ ϑ ガ既約ナルトキハ ϑ ノ (λ_i ノ係數ニシタガッテ gewicht ニ辞書式ノ順序ヲ附ケタトキノ) 最高 gewicht Λ (之レガ ϑ ヲ特徴ヅケル) ニ対シテ, $\tau_A(\Lambda)$ ガ再ビ ϑ ノ gewicht ニナルコトガ必要十分デアル。(Weyl ノ表現論ノ論文参照)

定理 [4.8] 『複素係數ノ準單純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ ノ自己同型群ヲ $\mathfrak{a}$, 内部同型群ヲ $\mathfrak{a}_0$ トスレバ

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + A_1\mathfrak{a}_0 + \cdots\cdots + A_{k-1}\mathfrak{a}_0, \quad A_i\mathfrak{f} = \mathfrak{f},$$
$$i = 1, \cdots\cdots, k-1$$

A_i ガ $\mathfrak{f}$ ニ生ズル "rotation" ヲ τ_i トスレバ

$$\mathfrak{T} = \gamma + \tau_1\gamma + \cdots\cdots + \tau_{k-1}\gamma$$

$\mathfrak{g}$ ノ表現 ϑ ニ $A \in A_i\mathfrak{a}_0$ ヲ作用サセテ出来ル表現 ϑ^A ハ, ϑ ノ gewichte ノ集合 $\{\Lambda^{(j)}\}$ ニ τ_i ヲ施シタ $\{\tau_i\Lambda^{(j)}\}$ ヲ gewicht ニ持ツ表現デアル。特ニ ϑ ガ既約ナラ ϑ ノ最高 gewicht Λ ニ τ_i ヲ施シタ $\tau_i(\Lambda) = \gamma$ ノ "rotation" ヲ施シテ得ラレル (即チ Weyl ノ言葉ヲ使ヘバ, $\tau_i(\Lambda)$ ト

äquivalent ナリ Gewicht 中最高ノモノガ $\mathfrak{V}^A$ ノ最高 Gewicht デアル。

$\mathfrak{V}$ ヲ変ヘナイ Autom. ノ群 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{V}}$ ハ, $\mathfrak{V}$ ノ Gewichte ノ集合ヲソレ自身ニ移ス τ_i ヲ例ヘバ $\tau_1, \cdots\cdots, \tau_{\ell-1}$ トスレバ

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{V}} = \mathfrak{a}_0 + A_1 \mathfrak{a}_0 + \cdots\cdots + A_{\ell-1} \mathfrak{a}_0$$

特ニ $\mathfrak{V}$ ガ既約ナラ, $\mathfrak{V}$ ノ最高 Gewicht ヲ $\mathfrak{V}$ 自身ノ Gewicht ニ移ス τ_i ヲトレバヨイ。』

任意ノ "rotation" ハ Wurzel ノ全体即チ正規表現ノ Gewicht 全体ヲ夫自身ニ移スカラ;

系.『正規表現ハ任意ノ Autom. デ変ラナイ。』

尤モ之レハ任意ノ基礎体ノ上ノ任意ノ Lie 環(又ハ assoziative algebra 及ビ有限群)ニツイテモ直接カンタンニ云ヘル事デアル。即チ, $\mathfrak{V}$ ヲ Basis $u_1, \cdots\cdots, u_r$ ニ関シテ考ヘルナラ $\mathfrak{V}^A$ ヲ Basis $Au_1, \cdots\cdots, Au_r$ ニ関シテ考ヘレバ同ジ Matrix デアラハサレルカラデアル。

定理[4.7]ヲ具体的ナ場合ニ應用シテ見ル。[4.5]ニ依ッテ, 単純環ノ既約表現ニツイテ考ヘレバヨイ。サテ複素数体 K ノ上ノ単純環デハ大部分 $\mathfrak{Y} = \gamma$ 即チ $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$, 従ッテ総ベテノ Autom. ハ如何ナル表現ヲモ変ヘナイ。

$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}_0$ ナノハ A_n $(n \geqq 2)$, D_n $(n \geqq 4)$, E_6 ダケデアル。(Gantmacher l.c. 参照。ココニ A_n ハ $n+1$ 次 unimodular group $SL(n+1, K)$ ノ Lie 環

D_n ハ $2n$ 次元直交変換群 $O(2n, K)$ ノ Lie 環)

i) A_n 型 ($n \geqq 2$) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + A_1\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{T} = \gamma + \tau_1 \gamma$

τ_1 ハ $\tau_1(\lambda_0) = -\lambda_0, \cdots\cdots, \tau_1(\lambda_n) = -\lambda_n$. τ_1 ニ相當スル A_1 ハ, $\mathfrak{g}$ ヲ通常ノ Spur $= 0$ ノ Matrix デアラハシタトキ, transponieren シテ,「マイナス」ヲツケルコトニ相當スル, 即チ Kontragredient ニウツル事,（Lie 群ニシテ云ヘバ, transponieren シテ逆ヲ作ル事）。扱テ既約表現 ϑ ヲ決定スル最高 Gewicht ハ

$$\Lambda = m_0\lambda_0 + m_1\lambda_1 + \cdots\cdots + m_n\lambda_n, \quad m_i \text{ ハ整数}$$

$$m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots\cdots \geqq m_n$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots\cdots + \lambda_n = 0$$

但シ最後ノ條件ニヨリ m_i ハ其差ダケガ問題デアル, 故ニ例ヘバ $m_n = 0$ ト決メテモヨイ。

$$\tau_1(\Lambda) = -m_0\lambda_0 - \cdots\cdots - m_n\lambda_n$$

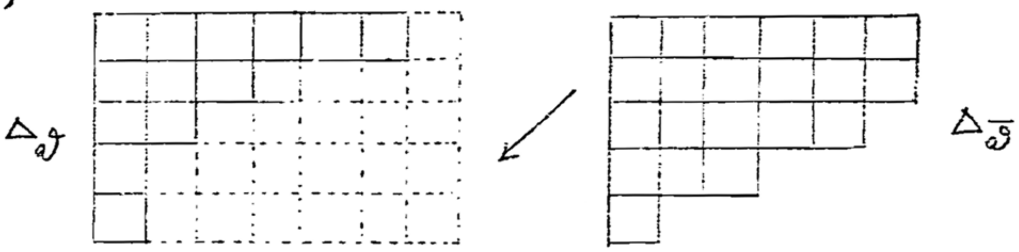
$\therefore$ ϑ^{A_1} ノ最高 Gewicht ハ

$$\Lambda^{A_1} = (m - m_n)\lambda_0 + \cdots\cdots + (m - m_0)\lambda_n,$$

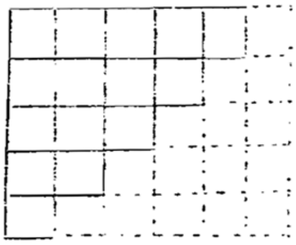
m ハ任意

ϑ ノ diagram Δ_ϑ ト, $\bar{\vartheta} = \vartheta^{A_1}$ ノ diagram $\Delta_{\bar{\vartheta}}$ トノ關係ハ, $\Delta_{\bar{\vartheta}}$ ヲ 180° 廻轉シテ Δ_ϑ ト合セルト丁度合フ樣ニナッテヰル。

イ)



ロ)



特ニ上ノ圖ロ）ノ様ニ$180°$マハシテ自分自身ト合フ様ナ diagram ヲモツ ϑ ニ對シテハ，$\bar{\vartheta} \sim \vartheta$，即チカヽル既約表現 ϑ ハ outer automorphism デモ invariant デ，從ツテソレハ一ツダケデ一ツノ(A)一類ヲ作ツテ居ル。圖ロ）ハ Lie 環 A_4 ノ正規表現ノ diagram デアツテ，從ツテ定理[4.7]系ニ依ツテモ當然 $\bar{\vartheta} \sim \vartheta$ ニナル筈デアル。

diagram（即チ最高 Gewicht）デ云ヒ表ハセバ，$\vartheta \longrightarrow \bar{\vartheta}$ ハ上ノ通リデアルガ，直接表現トシテ云ヘバ，$\bar{\vartheta}$ ハ ϑ ニ kontragredient ナ Darstellung ニ他ナラナイ。即チ

$$\bar{\vartheta}(S) \sim -\vartheta'(S)$$

何トナレバ，ϑ ノ Gewicht ガ $\Lambda_1, \cdots\cdots, \Lambda_g$ ナラ，$-\vartheta'$ ノ Gewicht ハ明カニ $-\Lambda_1, \cdots\cdots, -\Lambda_g$ 即チ $\lambda = \tau_1$ ヲ施スコトニヨツテ得ラレルカラデアル。之ハ ϑ ガ既約デナクテモ一般ニ云ヘル。マトメルト：

A_n ノ表現全体ヲ互ニ kontragredient ナモノノ pair ニ分ケルト，ソレラガ (A)-Klasse デアル。同ジ pair ニ屬スル二ツガ一致スルトキ，其ノ時ニ限リ，ソノ表現ハ $\mathfrak{a}$ 全体デ invariant デアリ，若シ二ツガ實際異ナッテ居レバ，outer autom. ニ依ッテ同ジ pair ノ他ノ一ツニ移ル。

ii) D_n 型 $(n \geqq 5)$ $\quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + A_1\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{F} = \gamma + \tau_1\gamma$

$\tau_1(\lambda_i) = \lambda_i$, $i = 1, \cdots\cdots, n-1$, $\tau_1(\lambda_n) = -\lambda_n$

τ_1 ニ相當スル A_1 ハ，D_n ヲ $2n$ 次元ノ歪對称行列全体デアラハシタトキ，超平面ニ關スル Spiegelung デ transform スルコトニ當ル。表現 ϑ ヲ決定スル最高 Gewicht ヲ

$$\Lambda = m_1\lambda_1 + \cdots\cdots + m_n\lambda_n$$

トスレバ，m_i ハ次ノ條件ヲ満足シ，夫レ以外ハ任意デアル (Weyl 參照)：

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots\cdots \geqq m_{n-1} \geqq |m_n|$$

且 $\quad m_1 \equiv m_2 \equiv \cdots\cdots \equiv m_n \equiv 1 \text{ or } \frac{1}{2} \pmod 1$

$\vartheta^* = \vartheta^{A_1}$ ハ $m_1\lambda_1 + \cdots\cdots + m_{n-1}\lambda_{n-1} - m_n\lambda_n$ ヲ extremes Gewicht[3] ニ持ツガ，之ハ同時ニ最高デアル。

---

3) poids frontière (Cartan). 即チスベテノ Gewichte ガ Λ ヲ通ルアル超平面ノ片側ニアル様ナ Λ. 最高 Gewicht (poids dominant) ハソノ一例．而モ表現ガ既約ナラ，總テノ p. fr. ハ p. dom. ニ equivalent デアル。

従ッテ ϑ ガ $\mathfrak{a}$-invariant ナルタメニハ $m_n=0$ ガ必要且十分デアル。(特ニ $m_i\equiv\frac{1}{2}$ ナル Spinor-表現ハ何時デモ $\mathfrak{a}$-invariant デナク従ッテ,(A)-類ハ丁度二ツノ表現ヲ含ム)。

iii) D_4 型。 之レガ一番複雑デアル。

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0+A_1\mathfrak{a}_0+\cdots\cdots+A_5\mathfrak{a}_0,$$

$$\mathfrak{F}=\gamma+\tau_1\gamma+\cdots\cdots+\tau_5\gamma.$$

$\mathfrak{F}/\gamma$ ハ三次ノ対称群ニ isomorph デ, τ_i ハ Gewicht ノ space $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ ノ一次変換トシテ

$$\tau_1=\begin{bmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix},\quad \tau_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$(\tau_1^2=1,\ \tau_2^3=1)$ $\quad\tau_3=\tau_2^2,\quad \tau_4=\tau_2\tau_1=\tau_1\tau_2^2,$

$\tau_5=\tau_1\tau_2=\tau_2^2\tau_1$

トナッテ居ル。(例ヘバ Gantmacher: l.c. 参照)

既約表現 ϑ ノ最高 Gewicht ガ

$$m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3+m_4\lambda_4$$

$$m_1\equiv m_2\equiv m_3\equiv m_4\equiv 0 \text{ or } \tfrac{1}{2}\ (\mathrm{mod}\ 1)$$

$$m_1\geqq m_2\geqq m_3\geqq|m_4|$$

ナルトキ ϑ^{A_i} ノ最高 Gewicht ハ簡単ナ計算ノ結果次ノ様ニナル。但シ茲ニ $M=\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3+m_4)$ トスル。

$$\vartheta: \quad m_1\lambda_1 \quad + m_2\lambda_2 \quad + m_3\lambda_3 \quad + m_4\lambda_4$$

$$\vartheta^{A_1}: \quad m_1\lambda_1 \quad + m_2\lambda_2 \quad + m_3\lambda_3 \quad - m_4\lambda_4$$

$$\vartheta^{A_2}: \quad (M-m_4)\lambda_1 \quad + (M-m_3)\lambda_2 + (M-m_2)\lambda_3 - (M-m_1)\lambda_4$$

$$\vartheta^{A_3}: \quad M\lambda_1 + (m_1+m_2-M)\lambda_2 + (m_1+m_3-M)\lambda_3 - (m_1+m_4-M)\lambda_4$$

$$\vartheta^{A_4}: \quad (M-m_4)\lambda_1 \quad + (M-m_3)\lambda_2 + (M-m_2)\lambda_3 + (M-m_1)\lambda_4$$

$$\vartheta^{A_5}: \quad M\lambda_1 + (m_1+m_2-M)\lambda_2 + (m_1+m_3-M)\lambda_3 + (m_1+m_4-M)\lambda_4$$

之レデ ϑ ノ (A)－類ハ完全ニ決ルノデアルガ，表現 ϑ ト表現ト ϑ^{A_i} トノ関係ハ A_n－type ノ時ノ様ニ明瞭デナイ。蜂一，元ノ Lie 環ノ autom. A_2 等ガ実際ドンナモノダカヨク分ラナイカラデアル。（之レガ見通シヨク分ルト相当面白イト思フ。筆者ガ知ラナイダケデ Cartan ノドコカニ書イテアルノカモ知レナイ）

猶、既約表現 ϑ ヲ変ヘナイ autom. ノ群 $\mathfrak{A}_\vartheta$ ハ gewicht ノ係数ノ性質ニ従ッテ夫々次表ノ様ニナル。

ϑ ノ最高 gewicht ニ於テ			$\mathfrak{A}_\vartheta$	ϑ ノ (A)－類ノ member ノ数
m_4	m_1+m_4-M	$M-m_1$		
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\mathfrak{A}_0$	6
$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\mathfrak{A}_0 + A_1\mathfrak{A}_0$	3
$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$\mathfrak{A}_0 + A_4\mathfrak{A}_0$	3
$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$\mathfrak{A}_0 + A_5\mathfrak{A}_0$	3
$=0$	$=0$	$=0$	$\mathfrak{A}$	1

$\mathfrak{A}_0$ ヲ含ム $\mathfrak{A}$ ノ部分群中，交代群ニ相當スル $\mathfrak{A}_0 + A_2\mathfrak{A}_0 + A_3\mathfrak{A}_0$ ダケハ $\mathfrak{A}_\vartheta$ トシテ表ハレナイ。

iv) E_6. 之レハ Lie 環自身ノ構造ガ複雑デ, 正体ガヨク掴メナイ。併シ兎ニ角 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + A_1\mathfrak{a}_0$, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \tau_1\mathfrak{g}$ デ τ_1 ハ

Wurzelsystem:

$$\left\{\lambda_p - \lambda_q,\ \frac{\lambda_p+\lambda_q+\lambda_r-\lambda_s-\lambda_t-\lambda_u \pm(\lambda_7-\lambda_8)}{2},\ \pm(\lambda_7-\lambda_8)\right\}^{6}_{p,\dots,t=1}$$

ノ rotation トシテ $\tau_1(\lambda_i) = -\lambda_i$, $i = 1, \dots, 8$ ガ與ヘラレル。従ツテ $\mathfrak{D}^{A_1}$ ハ A_n ノバアヒト同ジク kontragrediente Darstellung $\overline{\mathfrak{D}}$ トナル。

最高 Gewicht ガ実際ニドウ変ルカヲ計算スルコトハ容易デアルガ, 書イテモツマラナイカラ略スコトニスル。唯 $\mathfrak{D}^{A_1} \neq \mathfrak{D}$ ナル既約表現 $\mathfrak{D}$ ガ実際存在スルコトヲ注意シテオカウ。(次ノ定理ノタメニ)

定理[4.9] (定理[4.6]ノ逆) 『複素係数ノ準単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ ノ Autom. A ガドノ(既約)表現ヲモ変ヘナイナラ, A ハ内部同型デアル。』

証明. $\mathfrak{g}$ ヲ単純環ノ直和ニ分ケテ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_s$ トシ, $\mathfrak{g}$ ノ Autom. A ガ $\mathfrak{g}$ ノ如何ナル表現ヲモ変ヘナイト仮定スル。

先ヅ A ハ $\mathfrak{g}$ ノ各単純成分ヲ permutate セズ夫自身ニ写ス。∵ 例ヘバ $A\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_i$ ダトスル。$\mathfrak{g}_1$ ノ表現デ 0 デナイモノ $\mathfrak{D}_1$ ヲ任意ニトリ, $\mathfrak{g}$ ノ表現

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \times 0 \times \cdots \times 0$$

ヲ作ル。表現 $\mathfrak{D}^A$ ハ

$$\mathfrak{d}^{A} = 0 \times \cdots\cdots 0 \times \mathfrak{d}_1^{A_1} \times 0 \times \cdots\cdots \times 0$$

ノ形ニナル。$\mathfrak{d}^{A} \sim \mathfrak{d}$ ナルタメニハ $i=1$ デナケレバナラナイ，即チ $A\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1$，一般ニ $A\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$． 故ニ A ハ単ニ $\mathfrak{g}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{g}_s$ ノ autom. $A_1, \cdots\cdots, A_s$ ヲ組合セタモノデアル。

而モ A_1 ハ $\mathfrak{g}_1$ ノ任意ノ表現 $\mathfrak{d}_1$ ニ對シテ $\mathfrak{d}_1^{A_1} \sim \mathfrak{d}_1$ デナケレバナラナイ。所ガ $\mathfrak{g}_1$ ガ単純ナトキニハ $\mathfrak{a}_{\mathfrak{d}_1} = \mathfrak{a}_0(\mathfrak{g}_1)$ ナル表現 $\mathfrak{d}_1$ ガ必ズアル。（$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$ ナル単純環デハ問題ハナイ。$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}_0$ ナル A_n, D_n, E_6 ニ於テモ既ニ述ベタ所ヲ調ベテ見ルト $\mathfrak{a}_{\mathfrak{d}_1} = \mathfrak{a}_0$ ニナル既約表現 $\mathfrak{d}_1$ ガ必ズアル）故ニ $A_1 \subset \mathfrak{a}_0(\mathfrak{g}_1)$ デナケレバナラナイ。

他ノ A_i ニツイテモ全様デアル。$\mathfrak{g}_i$ ヲ無限小変換群ニモツ単一連結ナ Lie 群ヲ $\mathfrak{G}_i$ トスレバ，A_i ハ $\mathfrak{G}_i$ ノ元 a_i ニヨル内部同型ニヨッテ惹キオコサレル。$\mathfrak{g}$ ニ對應スル単一連結ナ Lie 群ハ $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{G}_s$ デアッテ，ソノ元 $a = a_1 \times \cdots\cdots \times a_s$ ニヨル内部同型ガ，$\mathfrak{g}$ ニ於テ正ニ A ヲ惹起スコトハ明カデアル。故ニ A ハ Lie 環 $\mathfrak{g}$ ノ内部同型デアル。 q.e.d.

〔注意1〕 上ノ定理ノ証明ニ単純環ノ分類ト個々ノ単純環ノ表現ノ性質ヲ使ッタノハマヅイ。モット一般的ナ方法デ証明デキレバ面白イト思フ，

〔注意2〕 少クトモ準単純環ニ関スル限リハ，定理〔4.6〕,〔4.8〕ニ依ッテ複素係数ノ Lie 環ノ内部同型ノ「代數的」特徴ヅケガ出来タワケデアル。

従ッテ基礎体ノ如何ニ係ラズ「準単純 Lie 環ノ如何ナル表現ヲモ変ヘナイヤウナ自己同型ヲソノ「内部同型」ト云フ.ト一應定義シテモ、普通ノ場合ト矛盾シナイコトニナル。但シ此定義ガ準単純以外ノ場合ニモ justify サレルカドウカハ分ラナイ。

マヅイ事ニハ有限群ノバアヒニハ定理[4.6]ハ偽デ,シタガッテ内部同型ハ上ノ様ニ characterize デキナイ,トイフノハ,有限群 $\mathfrak{G}$ ノ自己同型Aが若シスベテノ元ヲソノ共軛類ノ中デ動カスナラ,Aハ任意ノ表現ノ指標ヲ変ヘズ従ッテ表現類ヲ変ヘナイカラ上ノ意味ノ「内部同型」デアルガ,有限群ニ於テハ共軛類ヲ permutate シナイニモカヽハラズ内部同型デナイヤウナ自己同型が存在スル例ガ知ラレテ居ル。(Burnside: On the outer isomorphism of a group, Proc. London Math. Soc. (2) 11, (1911), P. 40－42) 尤モ Bunside ノ example ハ (order p^6 ノ) metabel 群デアル。Lie 環ノバアヒデモ,恐ラク可解又ハ巾零環ニ就テハ,上ノ charcterisation ハ駄目デアラウ。

〔注意3〕 基礎体ヲ一般ノ代数的閉体カラ複素数体ニ限ラナケレバナラナクナッタノハ, infinitesimal カラ有限ナ Lie 群ニ移ッテ議論スルタメニ係数ノ Topologie ヲ必要トシタカラデアル。ソレ以後ノ議論デ essential ナノハ次ノ事実デアル。

「$\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{f}$ ヲ正則元ヲ含ムニツノ最大可換部分環トスル

トキ，$f^* = Uf$ ナル Autom. U ガアリ，而モ U ハ如何ナル表現ヲモ変ヘナイ」

既ニ述ベタヤウニ，之ハ複素数体デハ成立ツ。之レカラ，基礎体 P ガ代数的閉体デ而モ複素数体 K ニ代数的ニ einbetten デキルモノデサヘアレバ上ノ事実ガ成立ツコトガ容易ニ分ル。何トナレバ，U ヲ matrix トシテ表ハセバ，i) U ガ $\mathfrak{G}_{1P}$ ノ Autom. デアル事，ii) $Uf = f^*$.，iii) U ガイカナル表現ヲモ変ヘナイコトハ U ノ matrix ノ元ヲ未知数トシ係数ガ P ニ属スル代数方程式ノ system デ表ハサレル。ソレガ P ＿ K ニ於テ解ケルコトガ分ツテ居ルカラ、P ニ於テモトケル。[4)]

上ノ様ナ P ハ標数 0 ノ代数的閉体トシテハカナリ一般ナモノデアル。スナハチ P ノ元デ素体（＝有理数体）Γ ニ関シテ代数的ニ独立ナモノノ数（濃度），所謂 P ノ Γ 上ノ Transzendenzgrad ガ K ノソレヲ超エサヘシナケレバヨイ。K ノ Transzendenzgrad ハドレダケダカ知ラナイガ，兎ニ角可附番ヨリ大キイコトハ確カダカラ，普通考ヘル P ナラ大抵大丈夫デアル。コノヤウナ基礎体ニ対シテハ上ニ述ベタ事、特ニ個々ノ単純環ニ就テ述ベタ事ハ全部成立ツ。

Transzendenzgrad ガ之レ以上大キクナツタ為ニ定理ガ成立タナクナルトハ殆ンド考ヘラレナイ。従ツテ事実上任意ノ標数 0 ノ代数的閉体デ成立ツデアラウ。結果ガ

---

4) コノ考ヘ方ハ中山サンニ教ヘテ頂キマシタ。

純代数的ダカラ，斯様ナ" topologisch-algebraisch"
ナ方法ハ，結局ハ" algebraisieren"デキルモノト想
像サレル。Weyl ガ所謂 unitarian trick デ
" topologisch-algebraisch " ニ証明シタ表
現ノ完全可約性ガ，後ニ Braner , Whitehead 等ニ
依リ" algebraisieren " サレタ様ニ。